Uitwerkingen college reflectie: Combinatoren (04.12.2013)

1. (1) Zij $P_1 = \mathsf{SI}(\mathsf{K}x)$, dan $P_1 y = \mathsf{SI}(\mathsf{K}x)y = \mathsf{I}y(\mathsf{K}xy) = y(x) = yx$.
   Er is geen term met minder variabelen, want x komt voor in xy en niet in y, want $x \neq y$.

   (2) Als nu $Pxy = yx$, dan zoek ik P_2 zodanig dat $P_2 x = P_1$, want dan $P_2 xy = P_1 y = yx$. Met het algoritme uit het hoorcollege vinden we:

   $$P_2 = \mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{KS})(\mathsf{KI}))(\mathsf{S}(\mathsf{KK})\mathsf{I})$$

   Controle: $\mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{KS})(\mathsf{KI}))(\mathsf{S}(\mathsf{KK})\mathsf{I})x = \mathsf{S}(\mathsf{KS})(\mathsf{KI})x((\mathsf{S}(\mathsf{KK})\mathsf{I})x) =$

   $\mathsf{KS}x(\mathsf{KI}x)(\mathsf{KK}x(Ix)) = \mathsf{SI}(\mathsf{K}x) = P_1$

   (3) $P_3 xy = y = Iy$, dus ik zoek P_3 met $P_3 x = I$.
   Zij $P_3 = \mathsf{KI}$, dan $P_3 xy = \mathsf{KI}xy = \mathsf{I}y = y$.

   (4) $P_4 x = x(xx)$. Dit is al van de vorm $P_4 x = P$, waarbij $P = x(xx)$.
   Met het algoritme vinden we: $P_4 = \mathsf{SI}(\mathsf{SII})$

   (5) $P_5 xy = xxx$. We vinden P_5 in twee stappen. Eerst bepaal ik Q die y niet bevat, zodat $Qy = xxx$. Daarna bepaal ik P_5 met $P_5 x = Q$, want dan $P_5 xy = Qy = xxx$.
   $Q = \mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{K}x)(\mathsf{K}x))(\mathsf{K}x)$. Let hierbij op dat $xxx = (xx)x$.
   Dit geeft $P_5 = \mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{KS})(\mathsf{S}(\mathsf{KK})\mathsf{I}))(\mathsf{S}(\mathsf{KK})\mathsf{I}))(\mathsf{S}(\mathsf{KK})\mathsf{I})$

   (6) Dezelfde 'truc' werkt hier. We bepalen Q zodat $Qy = xyy$ en P_6 zodat $P_6 x = Q$.
   $Q = \mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{K}x)\mathsf{I})\mathsf{I}$, dan $P_6 = \mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{KS})(\mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{KS})(\mathsf{S}(\mathsf{KK})\mathsf{I}))(\mathsf{KI})))(\mathsf{KI})$

   (7) We bepalen weer Q zodat $Qy = x(yy)$ en P_7 zodat $P_7 x = Q$. Zij $Q = \mathsf{S}(\mathsf{K}x)(\mathsf{SII})$, dan $P_7 = \mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{KS})(\mathsf{S}(\mathsf{KK})\mathsf{I}))(\mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{KS})(\mathsf{KI}))(\mathsf{KI}))$

   Ook P_2 tot en met P_7 hebben zo min mogelijk variabelen, namelijk geen.

2. (8) $Q = QK$, dan is Q een vast punt (fixed point) van $[x]\, x\mathsf{K}$. Dit de functie P met $Px = xK$: $PQ = QK = Q$. We bepalen dus eerst de functie P en daarbij wordt het vaste punt gegeven door de stelling uit het hoorcollege.
   $P = \mathsf{SI}(\mathsf{KK})$ het vaste punt is WW, waarbij $W = [x]\, P(xx)$.
   Er geldt: $W = \mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{KS})(\mathsf{KI}))(\mathsf{S}(\mathsf{KK})(\mathsf{KK})))(\mathsf{SII})$, dus

   $$Q = \mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{KS})(\mathsf{KI}))(\mathsf{S}(\mathsf{KK})(\mathsf{KK})))(\mathsf{SII})\mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{KS})(\mathsf{KI}))(\mathsf{S}(\mathsf{KK})(\mathsf{KK})))(\mathsf{SII})$$

   (9) Zij Q het vaste punt van de functie P_2 met $P_2 qx = xq$, want dan $P_2 Q = Q$ en dus $Qx = P_2 Qx = xQ$.
   We zagen al: $P_2 = \mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{KS})(\mathsf{KI}))(\mathsf{S}(\mathsf{KK})\mathsf{I})$. Dus $Q = WW$ waarbij

   $$\begin{aligned} W = {} & \mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{KS})(\mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{KS})(\mathsf{S}(\mathsf{KK})(\mathsf{KS})))(\mathsf{S}(\mathsf{KK})(\mathsf{KI})))) \\ & (\mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{KS})(\mathsf{S}(\mathsf{KK})(\mathsf{KK}))(\mathsf{KI})))(\mathsf{SII}) \end{aligned}$$

   (10) Als geldt $Px = x\mathsf{II}$, dan is Q een vast punt van P. $P = \mathsf{S}(\mathsf{SI}(\mathsf{KI}))(\mathsf{KI})$.
   Zij $Q = WW$, waarbij $W = [x]\, P(xx)$;

   $$W = \mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{KS})(\mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{KS})(\mathsf{KI}))(\mathsf{S}(\mathsf{KK})(\mathsf{KI}))))(\mathsf{S}(\mathsf{KK})(\mathsf{KI})))(\mathsf{SII})$$

(11) Als Q het vaste punt is van de functie P_6 met $P_6 qx = qxx$ zijn we er. Inderdaad, als $Q = P_6 Q$, dan $Qx = P_6 Qx = Qxx$. We hebben P_6 al bepaald, daaruit kunnen we Q halen.

3. (a) Stel $\mathsf{I} = \mathsf{K}$, dan
$$y = \mathsf{KI}xy = \mathsf{IK}xy = \mathsf{K}xy = x.$$

Stel $\mathsf{I} = \mathsf{S}$, dan
$$y = \mathsf{SK}xy = \mathsf{IK}xy = \mathsf{K}xy = x.$$

Stel $\mathsf{K} = \mathsf{S}$, dan $\mathsf{I} = \mathsf{SKK} = \mathsf{KKK} = \mathsf{K}$ en we zijn terug in het eerste geval.

(b) Stel $\mathsf{K} = \mathsf{KK}$, dan
$$x = \mathsf{I}x = \mathsf{KI}yx = \mathsf{KKI}yx = \mathsf{K}yx = y.$$

Dus $\mathsf{K} = \mathsf{KK} \vdash x = y$, maar ook $\nvdash x = y$, dus $\mathsf{K} \neq \mathsf{KK}$.

(c) Stel er is een F zodanig dat $F(xy) = x$ voor alle x. Dan geldt $\mathsf{K}x = F(\mathsf{K}xy) = Fx = F(\mathsf{I}x) = \mathsf{I}$ en dus $x = \mathsf{K}xy = \mathsf{I}y = y$, tegenspraak, omdat we ervan uitgaan dat $\nvdash x = y$.
Stel er is een G zodanig dat $G(xy) = y$ voor alle y. Dan geldt $\mathsf{K} = G(\mathsf{KK}) = G(\mathsf{I}(\mathsf{KK})) = \mathsf{KK}$, in tegenspraak met (b).