Uitwerking Opgaven
Formele talen, grammaticas en automaten
Week 1

Bas Westerbaan
bas@westerbaan.name

24 april 2012

1 Opgave 1.1

Een goed en voldoende antwoord is: "$L_1 = L_2$, want L_1 en L_2 zijn alle woorden over a en b. $b \notin L_3$, maar $b \in L_1 = L_2$, dus $L_2 \neq L_3$". Een heel gedetailleerd antwoord is:

1.1 L_1

Per definitie $L(a) = \{a\}$ en $L(b) = \{b\}$, dus $L(a \cup b) = L(a) \cup L(b) = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$. Verder

$$\begin{aligned}
L_1 &= L\left((a \cup b)^*\right) \\
&= L(a \cup b)^* \\
&= \{a, b\}^* \\
&= \{a, b\}^0 \cup \{a, b\}^1 \cup \{a, b\}^2 \cup \{a, b\}^3 \cup \ldots \\
&= \{\lambda\} \cup \{a, b\} \cup \{aa, ab, ba, bb\} \cup \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\} \cup \ldots \\
&= \text{“alle woorden met } a \text{en } b\text{”}.
\end{aligned}$$

1.2 L_2

Per definitie

$$\begin{aligned}
L(a^*) &= L(a)^* \\
&= \{a\}^* \\
&= \{a\}^0 \cup \{a\}^1 \cup \{a\}^2 \cup \ldots \\
&= \{\lambda\} \cup \{a\} \cup \{aa\} \cup \ldots \\
&= \{\lambda, a, aa, \ldots\} \\
&= \{a^n;\, n \in \mathbb{N}\}.
\end{aligned}$$

en vergelijkbaar: $L(b^*) = \{\lambda, b, bb, \ldots\}$. Dus

$$\begin{aligned} L(a^*b^*) &= \{vw;\ v \in L(a^*);\ w \in L(b^*)\} \\ &= \{\lambda, a, b, ab, aab, bba, aa, bb, aabb, \ldots\} \\ &= \{a^n b^m;\ n, m \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

En dus:

$$\begin{aligned} L_2 &= L\left((a^*b^*)^*\right) \\ &= L(a^*b^*)^* \\ &= L(a^*b^*)^0 \cup L(a^*b^*)^1 \cup L(a^*b^*)^2 \cup \ldots \\ &= \{\lambda\} \cup \{a^n b^m;\ n, m \in \mathbb{N}\} \cup \{a^{n_1} b^{m_1} a^{n_2} b^{m_2};\ n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{N}\} \cup \ldots \end{aligned}$$

Dus L_2 zijn alle woorden over a en b die bestaan uit "nul-of-meer-keer een a en dan nul-of-meer-keer een b en dit alles een eindig aantal keer herhaald". Maar dit zijn precies alle woorden over a en b.

1.3 L_3

$$\begin{aligned} L(ab^*) &= \{vw;\ v \in L(a);\ w \in L(b^*)\} \\ &= \{a, ab, abb, abbb, \ldots\} \\ &= \{ab^n;\ n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

En dus:

$$\begin{aligned} L_3 &= L\left((ab^*)^*\right) \\ &= L(ab^*)^* \\ &= L(ab^*)^0 \cup L(ab^*)^1 \cup L(ab^*)^2 \cup \ldots \\ &= \{\lambda\} \cup \{ab^n;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{ab^{n_1} ab^{n_2};\ n_1, n_2 \in \mathbb{N}\} \cup \ldots \\ &= \{ab^{n_1} \cdots ab^{n_k};\ k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Dus L_3 zijn alle woorden van de volgende vorm: "eerst een a en dan nul-of-meer-keer een b" nul-of-meer-keer.

1.4 Conclusie

Blijkbaar $L_1 = L_2$, maar $L_1 = L_2 \neq L_3$, want bijvoorbeeld $b \in L_1$, maar $b \notin L_3$.

2 Opgave 1.2

2.1 Opgave 1.2 (i)

Een goede oplossing is $(\mathsf{a} \cup \mathsf{b} \cup \mathsf{c})(\mathsf{a} \cup \mathsf{b} \cup \mathsf{c})(\mathsf{a} \cup \mathsf{b} \cup \mathsf{c})$ en dat kun je controleren door de definities uit te schrijven: $L((\mathsf{a} \cup \mathsf{b} \cup \mathsf{c})(\mathsf{a} \cup \mathsf{b} \cup \mathsf{c})(\mathsf{a} \cup \mathsf{b} \cup \mathsf{c})) = L(\mathsf{a} \cup \mathsf{b} \cup \mathsf{c})^3 = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}^3 = \Sigma^3 = \{\sigma_1\sigma_2\sigma_3; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \Sigma\} = \{w; w \in \Sigma^*; \#w = 3\}$.

2.2 Opgave 1.2 (ii)

Een goede oplossing is $(\mathsf{a} \cup \mathsf{b} \cup \mathsf{c})(\mathsf{a} \cup \mathsf{b} \cup \mathsf{c})(\mathsf{a} \cup \mathsf{b} \cup \mathsf{c})(\mathsf{a} \cup \mathsf{b} \cup \mathsf{c})^*$, want

$$
\begin{aligned}
& L\left((\mathsf{a} \cup \mathsf{b} \cup \mathsf{c})(\mathsf{a} \cup \mathsf{b} \cup \mathsf{c})(\mathsf{a} \cup \mathsf{b} \cup \mathsf{c})(\mathsf{a} \cup \mathsf{b} \cup \mathsf{c})^*\right) \\
= \; & L\left((\mathsf{a} \cup \mathsf{b} \cup \mathsf{c})(\mathsf{a} \cup \mathsf{b} \cup \mathsf{c})(\mathsf{a} \cup \mathsf{b} \cup \mathsf{c})\right) L\left((\mathsf{a} \cup \mathsf{b} \cup \mathsf{c})^*\right) \\
= \; & \Sigma^3 L(\mathsf{a} \cup \mathsf{b} \cup \mathsf{c})^* \\
= \; & \Sigma^3 \Sigma^* \\
= \; & \left\{vw; v \in \Sigma^3, w \in \Sigma^*\right\} \\
= \; & \{w; w \in \Sigma^*; \#w \geq 3\}.
\end{aligned}
$$

2.3 Opgave 1.2 (iii)

Gegeven een woord w, waarin aa precies twee keer voorkomt. Er kunnen twee dingen aan de hand zijn: $w = w_1\mathsf{aa}w_2\mathsf{aa}w_3$ of $w = w_1\mathsf{aaa}w_3$, waarbij aa niet in w_1, w_2 en w_3 zit en verder: w_1 niet eindigt op een a; w_3 niet met een a begint én w_2 niet leeg is en noch eindigt noch begint met een a. We maken voor de voorwaarden op w_1, w_2 en w_3 eerst afzonderlijke reguliere expressies.

aa mag niet in w_1 voorkomen en w_1 mag niet eindigen op een a. We laten w_1 hier allebei aan voldoen, als elke a in w_1 opgevolgd moet worden door minstens één b. $\mathsf{b}^*(\mathsf{abb}^*)^*$ is dus precies de reguliere expressie waar w_1 aan moet voldoen.

Met een vergelijkbare redenering, kom je erachter dat w_3 moet voldoen aan $(\mathsf{b}^*\mathsf{ba})^*\mathsf{b}^*$.

De voorwaarden voor w_2 zijn iets ingewikkelder: w_2 mag niet leeg zijn, aa mag er niet in voorkomen en w_2 mag noch eindigen noch beginnen met een a. De reguliere expressie $\mathsf{bb}^*(\mathsf{abb}^*)^*$ beschrijft precies de voorwaarden op w_2.

We voegen de deelexpressies samen tot

$$\mathsf{b}^*(\mathsf{abb}^*)^*\mathsf{aabb}^*(\mathsf{abb}^*)^*\mathsf{aa}(\mathsf{b}^*\mathsf{ba})^*\mathsf{b}^* \cup \mathsf{b}^*(\mathsf{abb}^*)^*\mathsf{aaa}(\mathsf{b}^*\mathsf{ba})^*\mathsf{b}^*$$

waarvan we nu inzien dat dat een oplossing is.

3 Opgave 1.2

Gegeven zijn $L_1 = \left\{w \in \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}^*; \mathsf{bb} \text{ komt niet voor in } w\right\}$ en $L_2 = L\left(\mathsf{a}^*(\mathsf{baa}^*)^*\mathsf{b}?\right)$. De opgave is aan te tonen dat $L_1 = L_2$. Dat betekent dat we moeten laten zien dat $L_1 \subseteq L_2$ en $L_2 \subseteq L_1$.

Verkort "v komt voor in w" tot $v \sqsubseteq w$. (Oftewel: $v \sqsubseteq w \iff \exists w_1, w_2 \in \Sigma^*[w = w_1 v w_2]$).

3.1 $L_2 \subseteq L_1$

Als $\mathsf{bb} \not\sqsubseteq w$ en $bb \not\sqsubseteq v$, maar $bb \sqsubseteq vw$, dan moet v eindigen met een b en w beginnen met een b. Stel dat $A, B \subseteq \Sigma^*$ en dat voor alle $w \in A \cup B$, $\mathsf{bb} \not\sqsubseteq w$ en w eindigt niet met een b, dan geldt dit ook voor alle $w \in AB$. Dit geldt $L(\mathsf{ba})$

en $L(\mathsf{a})$, dus uit het voorgaande volgt dat het ook geldt voor $L(\mathsf{a}^*)$, $L(\mathsf{baa}^*)$, $L\left((\mathsf{baa}^*)^*\right)$, $L\left(\mathsf{a}^*(\mathsf{baa}^*)^*\right)$ en $L\left(\mathsf{a}^*(\mathsf{baa}^*)^*\mathsf{b?}\right)$. Dus voor elke $w \in L_2$, $\mathsf{bb} \not\sqsubseteq w$ en daarmee $w \in L_1$.

3.2 Vlot bewijs dat $L_1 \subseteq L_2$

Wij geven twee verschillende bewijzen. De eerste is losjes en mooi kort. De tweede is lang, gedetailleerd en rigoreus.

Gegeven $w \in L_1$. Dan komt bb niet voor in w. Dan is w van de vorm $\mathsf{a}^{n_0}\mathsf{ba}^{n_1}\mathsf{ba}^{n_2}\mathsf{b}\ldots\mathsf{ba}^{n_{k-1}}\mathsf{b}^{n_k}$ waar $n_0, n_k \geq 0$ en $n_1, \ldots n_{k-1} \geq 1$. Bijvoorbeeld voor baaab is $k = 2$, $n_0 = 0$, $n_1 = 3$ en $n_2 = 0$ *en* voor aa is $k = 0$ en $n_0 = 2$. We onderscheiden twee gevallen: w eindigt met een b of niet. Oftewel: $n_k = 0$ of $n_k > 0$.

$n_k = 0$ Allereerst: $\mathsf{a}^{n_0} \in L(\mathsf{a}^*)$ en $\mathsf{b} \in L(\mathsf{b?})$. Verder voor elke $1 \leq i \leq k-1$, geldt $n_i \geq 1$. Dus $\mathsf{a}^{n_i-1} \in L(a^*)$. Dus $\mathsf{ba}^{n_i} = \mathsf{baa}^{n_i-1} \in L(\mathsf{baa}^*)$. Dus $\mathsf{ba}^{n_1}\mathsf{ba}^{n_2}\ldots\mathsf{ba}^{n_{k-1}} \in L\left((\mathsf{baa}^*)^*\right)$. Dus allen tezamen: $w = \mathsf{a}^{n_0}\mathsf{ba}^{n_1}\ldots\mathsf{ba}^{n_{k-1}}\mathsf{b} \in L\left(\mathsf{a}^*(\mathsf{baa}^*)^*\mathsf{b?}\right)$. Dus $w \in L_2$.

$n_k \geq 0$ Allereerst $\mathsf{a}^{n_0} \in L(\mathsf{a}^*)$ en $\lambda \in L(\mathsf{b?})$. Verder voor elke $1 \leq i \leq k$ geldt $n_i \geq 1$ dus $\mathsf{ba}^{n_1}\mathsf{ba}^{n_2}\ldots\mathsf{ba}^{n_k} \in L\left((\mathsf{baa}^*)^*\right)$. Beide tezamen: $w = \mathsf{a}^{n_0}\mathsf{ba}^{n_1}\ldots\mathsf{ba}^{n_{k-1}}\mathsf{ba}^{n_k}\lambda \in L\left(\mathsf{a}^*(\mathsf{baa}^*)^*\mathsf{b?}\right)$. Dus $w \in L_2$.

Dus in alle gevallen: $w \in L_2$.

3.3 Rigoreus bewijs dat $L_1 \subseteq L_2$

Nu volgt een ander bewijs dat $L_1 \subseteq L_2$.

3.3.1 Inductie over woorden

Bij natuurlijke getallen heb je het principe van volledige inductie: als je $\forall n \in \mathbb{N}[P(n)]$ wilt bewijzen voor een eigenschap P, dan is het voldoende te bewijzen dat $P(0)$ geldt en dat als $P(n)$ geldt, ook $P(n+1)$ geldt.

Zo kun je ook een eigenschap P voor alle woorden bewijzen. Als je bewijst dat $P(\lambda)$ en voor alle $w \in \Sigma^*$ en $\sigma \in \Sigma$, als $P(w)$ dan $P(w\sigma)$, dán kunnen we ook concluderen dat $\forall w \in \Sigma^*[P(w)]$.

3.3.2 De strategie

We willen bewijzen dat voor alle $w \in \Sigma^*$: als $w \in L_1$ dan $w \in L_2$. Definieer $P(w) \iff (w \in L_1 \Rightarrow w \in L_2)$. Eerst bewijzen we dat $P(\lambda)$ en daarna dat voor alle $w \in \Sigma^*$ en $\sigma \in \Sigma$, als $P(w)$, dan $P(w\sigma)$. Met inductie kunnen we dan concluderen dat $\forall w \in \Sigma^*[P(w)]$, dus dat $L_1 \subseteq L_2$.

3.3.3 Basisstap: $P(\lambda)$

Als e een reguliere expressie is, dan is per definitie $L(e^*) = L(e)^* = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} L(e)^i = L(e)^0 \cup L(e)^1 \cup \ldots$. We hebben afgesproken dat voor elke $A \subseteq \Sigma^*$, $A^0 = \{\lambda\}$. Dus $L(e^*) = \{\lambda\} \cup L(e)^1 \cup \ldots$ en we zien dat in ieder geval $\lambda \in L(e^*)$. Dus ook $\lambda \in L(\mathsf{a}^*)$ en $\lambda \in L\left((\mathsf{baa}^*)^*\right)$. $L(\mathsf{b?}) = L(\mathsf{b} \cup \lambda) = L(\mathsf{b}) \cup L(\lambda) = \{\mathsf{b}, \lambda\} \ni \lambda$. En daarmee $\lambda = \lambda\lambda\lambda \in L(\mathsf{a}^*)\, L\left((\mathsf{baa}^*)^*\right) L(\mathsf{b?}) = L\left(\mathsf{a}^*(\mathsf{baa}^*)^*\,\mathsf{b?}\right) = L_2$.

$\mathsf{bb} \not\sqsubseteq \lambda$, dus $\lambda \in L_1$. En met het voorgaande $P(\lambda)$.

3.3.4 Inductiestap: $\forall w \in \Sigma^*, \sigma \in \Sigma\, [P(w) \Rightarrow P(w\sigma)]$

Stel $w \in L_1$, $w \in L_2$, $\sigma \in \Sigma$ en $w\sigma \in L_1$. Te bewijzen: $w\sigma \in L_2$.

Geval $w = \lambda$:

Geval $\sigma = \mathsf{a}$: $\mathsf{a} \in L(\mathsf{a}) \subseteq L(\mathsf{a})^* = L(\mathsf{a}^*) = L(\mathsf{a}^*)\{\lambda\}\{\lambda\} \subseteq L(\mathsf{a}^*)\, L\left((\mathsf{baa}^*)^*\right) L(\mathsf{b?}) = L\left(\mathsf{a}^*(\mathsf{baa}^*)^*\,\mathsf{b?}\right) = L_2$, dus $w\sigma = \sigma \in L_2$.

Geval $\sigma = \mathsf{b}$: $\mathsf{b} \in L(\mathsf{b}) \subseteq L(\mathsf{b}) \cup L(\lambda) = L(\mathsf{b} \cup \lambda) = L(\mathsf{b?}) = \{\lambda\}\{\lambda\}\, L(\mathsf{b?}) \subseteq L(\mathsf{a}^*)\, L\left((\mathsf{baa}^*)^*\right) L(\mathsf{b?}) = L\left(\mathsf{a}^*(\mathsf{baa}^*)^*\,\mathsf{b?}\right) = L_2$, dus $w\sigma = \sigma \in L_2$.

Geval $w \neq \lambda$: Er zijn zekere $w' \in \Sigma^*$ en $\sigma' \in \Sigma$ met $w = w'\sigma'$.

Geval $\sigma' = \mathsf{a}$: $w = w'\mathsf{a} \in L_2$, dus $w'\mathsf{a} \in L\left(\mathsf{a}^*(\mathsf{baa}^*)^*\,\mathsf{b?}\right) = L\left(\mathsf{a}^*(\mathsf{baa}^*)^*\right)\{\lambda, \mathsf{b}\}$, maar $w'\mathsf{a}$ eindigt niet met b, dus $w'\mathsf{a} \in L\left(\mathsf{a}^*(\mathsf{baa}^*)^*\right)$.

Geval $\sigma = \mathsf{a}$:

Geval $w'\mathsf{a} \in L(\mathsf{a}^*)$: $w'\mathsf{aa} \in L(\mathsf{a}^*)\{\mathsf{a}\} = \{\lambda, \mathsf{a}, \mathsf{aa}, \ldots\}\{\mathsf{a}\} = \{\mathsf{a}, \mathsf{aa}, \mathsf{aaa}, \ldots\} \subseteq L(\mathsf{a}^*) \subseteq L\left(\mathsf{a}^*(\mathsf{baa}^*)^*\,\mathsf{b?}\right)$, dus $w\sigma \in L_2$.

Geval $w'\mathsf{a} \notin L(\mathsf{a}^*)$: $w'\mathsf{a} \notin L(\mathsf{a}^*)$, maar $w'\mathsf{a} \in L\left(\mathsf{a}^*(\mathsf{baa}^*)^*\right) = L(\mathsf{a}^*)\, L\left((\mathsf{baa}^*)^*\right) = L(\mathsf{a}^*)\left\{\lambda, L(\mathsf{baa}^*)^1, L(\mathsf{baa}^*)^2, \ldots\right\}$. Aangezien $L(\mathsf{a}^*)\{\lambda\} = L(\mathsf{a}^*)$, $w'\mathsf{a} \in L(\mathsf{a}^*)\left\{L(\mathsf{baa}^*)^1, L(\mathsf{baa}^*)^2, \ldots\right\} = L(\mathsf{a}^*)\, L\left((\mathsf{baa}^*)^*\right) L(\mathsf{baa}^*) = L\left(\mathsf{a}^*(\mathsf{baa}^*)^*\,\mathsf{baa}^*\right)$. Dus $w'\mathsf{aa} \in L\left(\mathsf{a}^*(\mathsf{baa}^*)^*\,\mathsf{baa}^*\mathsf{a}\right) \subseteq L\left(\mathsf{a}^*(\mathsf{baa}^*)^*\,\mathsf{baa}^*\right) \subseteq L\left(\mathsf{a}^*(\mathsf{baa}^*)^*\right) \subseteq L\left(\mathsf{a}^*(\mathsf{baa}^*)^*\mathsf{b?}\right)$. Blijkbaar $w\sigma \in L_2$.

Geval $\sigma = \mathsf{b}$: $w'\mathsf{ab} \in L\left(\mathsf{a}^*(\mathsf{baa}^*)^*\right)\{\mathsf{b}\} \subseteq L\left(\mathsf{a}^*(\mathsf{baa}^*)^*\right)\{\mathsf{b}, \lambda\} = L\left(\mathsf{a}^*(\mathsf{baa}^*)^*\right) L(\mathsf{b?}) = L\left(\mathsf{a}^*(\mathsf{baa}^*)^*\,\mathsf{b?}\right)$ — blijkbaar $w\sigma \in L_2$.

Geval $\sigma' = \mathsf{b}$: Ook $\sigma \neq \mathsf{b}$, want anders $\mathsf{bb} \sqsubseteq w\sigma = w'\mathsf{bb}$ hetgeen in tegenspraak is met de aanname $w\sigma \in L_1$. De woorden in $L(\mathsf{a}^*)$ eindigen niet in b. Net zo min eindigen de woorden in $L\left((\mathsf{baa}^*)^*\right)$ op b. $w = w'\mathsf{b}$ eindigt op b en per aanname $w \in L\left(\mathsf{a}^*(\mathsf{baa}^*)^*\,\mathsf{b?}\right)$, dus $w \in L\left(\mathsf{a}^*(\mathsf{baa}^*)^*\,\mathsf{b}\right)$. Voorts $w\mathsf{a} \in L\left(\mathsf{a}^*(\mathsf{baa}^*)^*\,\mathsf{ba}\right) \subseteq L\left(\mathsf{a}^*(\mathsf{baa}^*)^*\,\mathsf{baa}^*\right) \subseteq L\left(\mathsf{a}^*(\mathsf{baa}^*)^*\right) \subseteq L\left(\mathsf{a}^*(\mathsf{baa}^*)^*\,\mathsf{b?}\right)$ — blijkbaar $w\sigma \in L_2$.

Dus in alle gevallen $w\sigma \in L_2$.

4 Opgave 1.3

Een goede oplossing is

$$\Big(\mathsf{b}\,(\mathsf{aa})^*\,\mathsf{b} \cup \big(\mathsf{a} \cup \mathsf{b}\,(\mathsf{aa})^*\,\mathsf{ab}\big)\,\big(\mathsf{bb} \cup \mathsf{ba}\,(\mathsf{aa})^*\,\mathsf{ab}\big)^*\,\big(\mathsf{a} \cup \mathsf{ba}\,(\mathsf{aa})^*\,\mathsf{b}\big)\Big)^*.$$

De methode om tot deze oplossing te komen, wordt behandeld in het derde hoorcollege.