

Bijdrage Henk Barendregt: “Over welke kwestie zijn bijna al uw vakgenoten het oneens met u?” te verschijnen in NWT.

De wiskunde wordt terecht beschouwd als een van de meest exacte wetenschappen. Mathematische correctheid berust op strenge definities, bewijzen en berekeningen. Daardoor heeft het vak een precisie, kracht en zekerheid ‘welke in het leven hun weerga nergens kennen’ (R. Musil). Toch is beoefening van wiskunde fenomenologisch: menselijk inzicht is een essentieel hulpmiddel. Dit is nodig om na te gaan dat de genoemde definities niet circulair zijn, de bewijzen kloppen en de berekeningen van toepassing zijn. Hoewel deze oordelen van personen komen, en daarmee subjectief lijken te zijn, hebben deze echter een intersubjectieve waarheidswaarde, welke objectief is. Dat maakt wiskundigen soms een beetje eigenwijs, maar dat zij hun vergeven: zonder wiskunde zou de hedendaagse welvaart onmogelijk zijn. Bovendien wordt menig kunstenaar, filosoof en theoloog geraakt door de schoonheid van de wiskunde.

In de grondslagen van de wiskunde wordt bestudeerd wat de achtergronden zijn van genoemde inzichten. Een analyse van het definiëren, redeneren en berekenen geeft aan hoe deze ambachten bedreven kunnen worden. Een verbaasd klein aantal regels blijkt voldoende voor het machtige bouwwerk van de wiskunde. Men is er zelfs in geslaagd om stukken wiskunde zó volledig te ‘formaliseren’, dat wil zeggen te voorzien van alle mogelijke details, dat computers (de zogenaamde *wiskundige assistenten*) deze zelfstandig kunnen verifiëren. Menselijke oordeel blijft echter nodig, bij het bepalen of een wiskundige theorie interessant is. Bijvoorbeeld als deze van toepassing is binnen andere wetenschappen of andere takken van de wiskunde. Met de volgende stelling zijn de meeste wiskundigen het niet eens.

Het is de moeite waard om grote delen van de wiskunde te formaliseren.

Er zijn verschillende redenen, niet allemaal gebaseerd op kennis van zaken waarom men dit niet wil.

1. *Moeilijk.* Het is veel werk om gewone wiskunde te formaliseren: dit kost doorgaans ongeveer vier keer zoveel ruimte en tien keer zoveel tijd.

2. *Geen voordelen.* We zijn al zeker van onze zaak. Er is geen grotere graad van precisie en kracht. Het formaliseren heeft dus geen nut.

3. *Wel nadelen.* Door het formaliseren haalt men de wiskunde ervaring weg uit het denken van de wiskundige. Men kan formele bewijzen niet meer intuïtief overzien.

4. *Mogelijke onbetrouwbaarheid.* Wanneer wiskunde van computers afhankelijk wordt, dan wordt deze dubieus. Ook al heeft men de correctheid van het verifiërende programma ingezien, dan nog is men afhankelijk van de hardware, het operating systeem, de compiler en de afwezigheid van ‘kosmische stralen’, die het functioneren van een computer en zijn geheugen mogelijk verkeerd kunnen beïnvloeden.

Mijn reactie op deze tegenwerpingen is het volgende. Ad 1. Formaliseren is inderdaad moeilijk, maar wel mogelijk. De vierkleurenstelling, inclusief een zeer lange berekening en bewijs van relevantie van deze berekening, is volledig

geformaliseerd door G. Gonthier, zie (research.microsoft.com/~gonthier/4colproof.pdf), en geverifieerd door de wiskundige assistent Coq. Door in te zien hoe de intuïtieve stappen automatisch onderbouwd kunnen worden en door bijbehorende gecertificeerde software te schrijven, zullen genoemde factoren (vier en tien) waarschijnlijk naar beneden bijgesteld kunnen worden, hetgeen bijvoorbeeld gebeurd is bij de vierkleurenstelling. Ad 2. Wiskundige bewijzen worden steeds complexer en kunnen alleen door een paar specialisten in de wereld begrepen worden. Omdat deze resultaten ook elders gebruikt kunnen worden, zou het goed zijn om hier een zeer betrouwbare basis aan te geven. Indien een stuk wiskunde geformaliseerd is, dan kan de referee zich beperken tot een oordeel over de relevantie. Te verificatie-techniek wordt toegepast in de betrouwbare constructie van *hardware* en *software*. Dit zou wel eens een van de meest belangrijke toepassingen van de wiskunde kunnen worden. Ad 3. Het is mogelijk om de geformaliseerde wiskunde zo weer te geven dat stappen die voor een menselijke wiskundige duidelijk zijn onzichtbaar weergegeven worden op zo'n manier dat de rest vrij goed overeen komt met de bekende informele bewijsstijl. Ad 4. De *hardware* van computers wordt tegenwoordig gedeeltelijk correct bewezen, dat wil zeggen dat het voldoet aan specificaties. Voor het operating systeem en de compiler ontbreekt deze geverifieerde betrouwbaarheid inderdaad. Maar omdat het bij de wiskundige assistent (platform plus verificatie-programma) om een product gaat dat door vele mensen gebruikt wordt (reeds nu), zullen ontwerpfouten snel gevonden worden. Men moet dan ook niet spreken van absolute betrouwbaarheid, maar de hoogst mogelijke graad van betrouwbaarheid. Deze is vele malen betrouwbaarder dan de resultaten van de informele wiskunde.

Indrukwekkende case studies (o.a. Jordancurvestelling, priemgetallenstelling en natuurlijk de genoemde vierkleurenstelling; zie (www.cs.ru.nl/~freek/100)) laten zien dat formaliseren mogelijk is. Wanneer deze techniek gemeengoed is geworden zullen wiskundigen op een andere manier kunnen communiceren: de focus kan komen te liggen op ideeën en de intuïties erachter. Tenslotte kan gesteld worden dat formaliseren zijn eigen schoonheid heeft. Iedere eenentwintigste eeuwse wiskundige zou op zijn minst één bewijs op deze manier weer gegeven moeten hebben.

Henk Barendregt
Radboud Universiteit Nijmegen